elliptische Koordinaten

a) Rechnen Sie den Laplace-Operator in der Ebene auf sogenannte elliptische Koordinaten um. Dazu werden Koordinaten (η, φ) im $\mathbb{R}^2$ eingeführt durch

$$x = c \cosh \eta \, \cos \varphi, \;\; y = c \sinh \eta \, \sin \varphi, \;\; c = const. > 0.$$

Welchen Kurven in der $(x; y)$-Ebene entsprechen den Linien $\eta = const.$ bzw. $\varphi = const.$?

b) Sei $\psi = \psi(x_1, x_2)$ harmonisch und $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(\eta; \varphi)$ entstehe aus ψ durch Umrechnen auf elliptische Koordinaten, d.h.

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(c \cosh \eta \, \cos \varphi, \;\; c \sinh \eta \, \sin \varphi) = \tilde{\psi}(\eta, \varphi).$$

Welcher Gleichung genügt dann $\tilde{\psi}$?

c) Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ die Ellipse

$$G := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1 \right\}, a, b > 0.$$

Bestimmen Sie unter Benutzung elliptischer Koordinaten eine Lösung $\psi = \psi(x_1, x_2)$ des folgenden äußeren Dirichletproblems:

$$\begin{array}{rcl} \Delta\psi & = & 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2 \backslash G, \\ \psi & = & x_1 \quad \text{auf} \quad \partial G, \\ |\psi| & & \text{beschränkt für} \quad |x| \to \infty. \end{array}$$